**图中独立集的近似**

Magnús M. Halldórsson

**1 前言**

独立集问题是在一个图中找到一个最大的、互不相邻的顶点集的问题。独立集及其相关问题,团，一直在组合理论中占据着重要的地位。

当我们寻找没有成对冲突的物品集合时（例如调度任务），独立集就会出现。除了众多应用（如果问题不是如此难以处理，则可能更为突出），独立集和团在计算理论中也经常出现，例如,在交互证明系统[6]或单调电路复杂度[2]中。它们是图的子图或装配问题的代表问题，是图着色的必要伴生问题，并且是基于接近或分散的聚类的基础。

直到1990年，关于独立集近似的文献极为稀少。自从Johnson[31]在1974年开始研究具有良好性能比的算法以来——特别是在一般图上展示了一整批独立集算法只有微不足道的性能比n之后——只有一篇文章展现了积极的结果[29]，除了平面图的特殊情况[34][8]。下界实际上不存在，因为虽然已知最佳性能比不会是某个固定常数，但可能仍然存在某个多项式时间近似方案。

对独立集的下界证明取得了巨大的成功并引起了世界范围内的关注，包括《纽约时报》。改进的近似算法方面的进展没有那么引人注目，但是已经开发出了一系列值得注意的结果。本次演讲的目的是将其中一些结果汇集起来，考虑所学到的教训，并推测可能的未来发展。

本文并不意味着是独立集近似算法的最终总结，而是对已知的性能比和应用的策略进行介绍，并提供一些已被证明的结果的概述。

我们更喜欢研究一系列算法，更甚于仅寻求最佳可能性能的保证。后者只有在某种程度上是好的，但并不是唯一重要的事情；一个单一数字表示的信息是有限的。算法策略在时间要求、数据的时间访问、并行化、简单性以及其他许多因素方面有所不同，这些因素远非无关紧要。不同的算法在不同类别的图上可能是不可比较的，例如，取决于最优解的大小。最后，证明技巧也许是启发式算法分析中最有价值的产物。

我们在本文的主体部分中看到了许多优秀的技巧和洞见。这些证明技巧将继续产生影响，不仅仅是在独立集近似算法中，而且还会应用于其他组合优化问题的研究中。

本文的组织如下。我们在下一节中定义了相关问题和定义。在正文部分，我们介绍了许多特定的结果，以说明特定的算法策略：子图删除、半定义编程、分区、贪心算法和局部搜索。我们列出已知的性能结果，并以讨论未解决问题作为结束。

**2** 问题和定义

独立集：给定一个图，找到一个最大基数集，满足每个都有。的独立集数目表示为，是最大独立集的大小。

团划分：给定一个图，将分割为不相交的团，找到包含每个顶点的最小基数集。

-SET PACKING：给定一个从有限集合中抽取的大小最大为的集合，找到一个最小基数集合，使得中的每个元素都包含在中的某个集合中。

这些问题也可以加权，加权在顶点(或在SET PACKING中在集合上)。

一个set packing实例是独立集问题的一种情况。给定一个集合系统，构建一个图，对于中的每个集合，图中有一个顶点，并且如果相应的集合相交，则它们之间有一条边。注意，如果中的集合大小最多为，则图包含一个 爪子，即由一个中心节点和个相互不相邻的顶点组成的子图。爪自由图中的独立集问题略微概括了-SET PACKING问题，后者略微概括了维匹配问题。

独立集算法的性能比由以下公式给出：

**符号**

顶点数 顶点v的度数

边数 v的邻居的集合

最大度 非v的邻居

平均度 由A找到的解的大小

δ 最小度 A的性能比

独立集数目 团划分数目

最大爪大小

**3** Ramsey理论和子图删除

第一个被发表了一般图上具有非平凡性能比的算法在1990年被提出。为了更好地理解已故大师Erdös留下的遗产，我们在这里给出了一个与 Boppana和Halldórsson[12]不同的，更接近于Erdös和 Szekeres的原始Ramsey定理[17]的方法。

图1 基于Ramsey理论的独立集算法

**定理1。**Ramsey算法找到了一个独立集和团，满足。特别的，。

证明。证明是通过对和的归纳。当或为1时很容易证明该声明。根据归纳假设：

想起且。因此，

声明现在符合等式。

很容易证明和相等的时候，它们的产生式时最小化的。这意味着，当时，有。

接下来的性能比的简单证明也是借鉴于Erdös的另一项工作[15]。

**定理2。**的性能比为。

证明。令表示返回的团的数量，表示图的大小下降到之前的团的数量。令表示后者中最小的的团的大小，其不失一般性的最大为。那么，且。

如果时返回的独立集，我们有。考虑的两个性能比的式子，对独立集的和对团划分的：

显然，任一性能比皆限制于。

对有高独立集数目的图，比率会更好。

**定理3。**如果，那么找到了一个大小为的独立集。

这说明了子图移除的策略是基于这样一个概念: 没有小稠密子图的图更容易逼近。

**4** Lovász theta函数

一个由Lovász[37]介绍的迷人的多项式时间计算函数有着非凡的三明治性质，其始终位于两个NP困难函数之间，满足。这个性质表明它可能特别适合于获得任一函数的良好近似。虽然其中一些希望已经破灭，但它已经找到了一些富有成效的应用，它仍然是获得改进近似的最有希望的候选者。

Karger，Motwani和Sudan[32]在着色的情境中证明了以下性质。“软omega”符号隐藏了对数因子。

**定理4（Karger等）。**如果，那么一个大小为的独立集高概率可以在多项式时间内被构造出来。

Mahajan和Ramesh[38]展示了这些算法及关联算法是如何去随机化的。Alon和Kahale[4]在独立集上将theta函数应用得更远。

**定理5（Alon，Kahale）。**如果（例如），那么我们可以找到一个有着个顶点的图，满足。

结合这两个定理，他们得到了在定理3上做改进的高独立性图上的一个比率。

**引理1。**对任一固定整数，如果，那么可以在多项式时间内找到一个大小为的独立集。

在稀疏图上的theta函数。Karger等在图的最大度上证明了一个核心结果。事实上，他们的观点在平均度上也是成立的。

**定理6（Karger等）。**如果，那么一个大小为的独立集高概率可以在多项式时间内被构造出来。

Vishwanathan[40]观察到这个定理结合定理5，也可以产生一个在有界度图上的改进算法。然而，据作者所知，以前的文献中并没有提到过以下命题。

**命题1。**独立集可以近似到（我们可能需要假设是一个与n无关的大常数）。

**证明。**给定，如果，那么根据定理5，我们可以找到一个有着个顶点的子图，它满足和最大度最大为。根据定理6，我们可以在（和）中找到一个大小为的独立集。如果，那么可以找到一个大小为的独立集，并且声明自来已满足。否则，，和任一大小为的最大解，为满足命题的比率。

**5** 划分和加权独立集

一个设计近似算法的简单策略是将问题划分为一系列更简单的子问题。

**观察1。**假设我们可以将图划分为个子图并在每个子图上最佳地解决加权独立集问题。那么，解的最大值为的一个-近似。

**证明。**图上最佳解的大小最大为每个子图上最大独立集的和，也就是最大为某些子图上最大解的倍。

这给出了在一般图中加权独立集上的第一个非平凡比率[21]。

**定理7。**加权独立集问题可以被近似为。

证明。

**参考文献**

1. 专著：［序号］ 作者.题名[M].出版地：出版者，出版年：起止页码.
2. 期刊：［序号］ 作者(多作者用逗号分开，超过3个者用“，等”代替).文章题目[J].刊物名称，年，卷(期)：起止页码.
3. 会议论文集：［序号］ 作者.题名[C]//编者.论文集名.出版地：出版者，出版年：起止页码.
4. 英文会议：［序号］ 作者.题名[C]//Proceedings of 会议名称.出版地：出版者，出版年：起止页码
5. 学位论文：［序号］ 作者.题名[D].保存单位XX学位论文，年份.
6. 报告：［序号］作者.题名[R].保存地点：保存单位，年份.
7. 报纸文章：［序号］ 作者.题名[N].报纸名，出版日期(版次).
8. 标准：［序号］标准编号，标准名称[S].出版地：出版者，出版年.
9. 专利: ［序号］专利所有者.专利题名[P].专利国别:专利号,公开日期.
10. 电子文献:主要责任者.电子文献题名[电子文献标识/载体类型]. [发表或更新日期].电子文献的出处或可获得地址.
11. 电子文献标识:[DB]-数据库 [CP]-计算机程序 [EB]-电子公告
12. 电子文献载体类型:[OL]-联机网络 [MT]--磁带 [DK]-磁盘 [CD]-光盘